# Istituzioni di Matematiche
# CdL Scienze Biologiche

## Successioni

Ogni funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ viene detta successione di numeri reali

se $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(n) = a_n \in \mathbb{R}$, in generale preferiamo utilizzare la notazione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ per descrivere una successione.

Attenzione Per una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha senso solo parlare di $\lim$ $\boxed{n \to +\infty}$

Def Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione,

1. Diremo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_0 \quad |a_n - l| < \varepsilon}$$

2. Diremo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ se

$$\boxed{\forall K > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_0 \quad a_n > K}$$ "diverge positivamente"

3. Diremo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ se

$$\boxed{\forall K>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0 \quad a_n < -K}$$ "diverge negativamente"

Se il carattere della successione rientra in uno di questi 3 casi, diremo che la successione è regolare

( cioè, $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n$ )

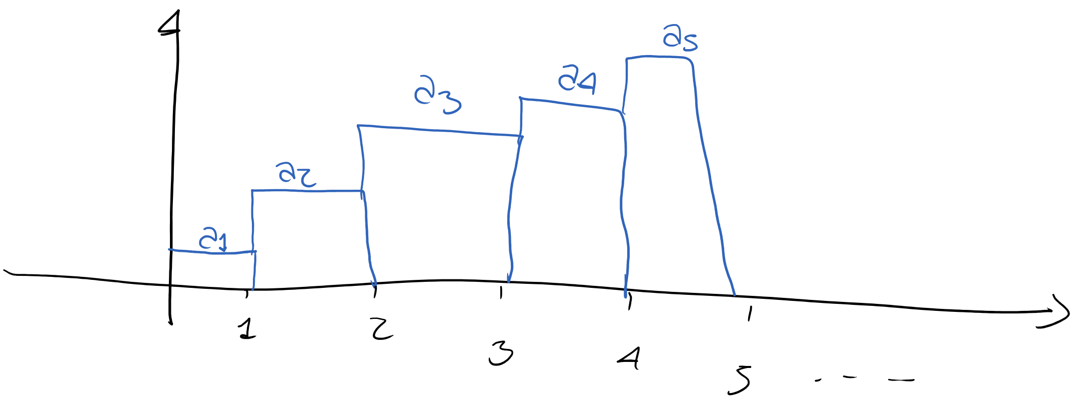
<u>Def</u> (Successioni Monotone)

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Diremo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è

(i) monotona crescente se $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) monotona decrescente se $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Graficamente:




<u>Nota</u> Se $(a)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente

$$\Rightarrow \quad a_n \geq a_1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1$$

mentre se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente

$$a_n \leq a_1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1$$

<u>Teorema</u>

Ogni successione monotona è regolare

Più precisamente

1. se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è <u>crescente</u>

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

2. se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

<u>Dim</u> (1.) $\quad (I_p) \quad a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Supponiamo $\quad l = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$

Ricordo prop caratteristiche del sup

(i) $\quad a_n \leq l \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad l - \varepsilon \leq a_{n_0}$

Concludo:
$$l-\varepsilon \overset{(ii)}{\leq} a_{n_0} \leq a_n \overset{(i)}{\leq} l < l+\varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

dalla monotonia crescente

ossia
$$l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = l$$

■

**Teorema** (unicità del limite)

se
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to+\infty} a_n = l_1 \\ \lim_{n\to+\infty} a_n = l_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow l_1 = l_2$$

**Teorema** (Permanenza del segno)

se $\lim_{n\to+\infty} a_n = l > 0 \Longrightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : a_n > 0 \quad \forall n \geq n_0$

**Teorema** (Confronto)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 3 successioni tali che
$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(Carabinieri)

1. Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = l = \lim_{n \to +\infty} c_n \implies \lim_{n \to +\infty} b_n = l$

2. Se $\lim_{n \to +\infty} b_n = +\infty \implies \lim_{n \to +\infty} c_n = +\infty$

3. Se $\lim_{n \to +\infty} b_n = -\infty \implies \lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$

## Successione di Nepero

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$a_1 = 2 \quad , \quad a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \qquad a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \quad \dots$

$a_1 < a_2 \ ? \iff 2 < \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$2 < \frac{9}{4} \ ?$

$\iff 8 < 9 \qquad$ Sì

$a_2 < a_3 \ ? \iff \frac{9}{4} < \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \ ?$

$\iff \frac{9}{4} < \left(\frac{4}{3}\right)^3$

$a_2 < a_3$ ! $\iff$ $\frac{9}{4} < \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3$ !

$\iff \frac{9}{4} < \left(\frac{4}{3}\right)^3$

$\iff \frac{9}{4} < \frac{64}{27}$

$\iff 9 \cdot 27 < 4 \cdot 64$ ?

$\iff 243 < 256$ Si

$$\begin{array}{r} 27 \cdot \\ 9 \\ \hline 243 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{r} 64 \cdot \\ 4 \\ \hline 256 \end{array}$$

In realtà Nepero è stato abile a mostrare in generale $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $a_n \geq a_1 = 2$

Nepero inoltre prova che $a_n \leq 3$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Dal teorema di limite per successioni monotone

$$\Rightarrow \quad \exists \text{ Finito } \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n := e$$

dove $\quad e = \sup\left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{2 < e < 3}$$

Def (Estratta)

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali, e sia $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ una successione crescente di numeri naturali. Allora la successione $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ viene detta estratta di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Esempio Un'estratta può essere

$a_2, \ a_7, \ a_8, \ a_{13}, \ a_{20}, \ \ldots$

Esempio (estratta pari)

$a_2, \ a_4, \ a_6, \ a_8, \ a_{10} \ldots$

$\left(a_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Esempio (estratta dispari)

$a_1, a_3, a_5, a_7, a_9 \ldots$

$(a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$

Teorema

$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \iff \left[ \forall (k_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \text{ crescente} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_{k_n} = l \right]$

Rienuncio in forma negativa

Teorema

Se esistono due estratte $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ crescenti tali che

$\lim_{n \to +\infty} a_{p_n} = l_1$ , $\lim_{n \to +\infty} a_{q_n} = l_2$

ma $l_1 \neq l_2 \Rightarrow \nexists \lim_{n \to +\infty} a_n$

ossia la successione non è regolare

Prop Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = l \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata

ossia $\exists M > 0 : |a_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$

In generale non vale il viceversa

<u>Esempio</u> $a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad -1 \leq (-1)^n \leq 1$ ossia è limitata

ma $\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = 1$ , $\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = -1$

$\Rightarrow \quad \nexists \lim_{n\to+\infty} (-1)^n$

<u>Teorema</u> Ogni successione limitata ammette almeno un'estratta convergente

<u>Teorema</u> (Bolzano-Weierstrass)

Se $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto limitato e infinito

$\Longrightarrow \quad DX \neq \emptyset$

($X$ ammette almeno un punto di accumulazione)

<u>Def</u> Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice di Cauchy se vale

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ con } n, m \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon}$$

## Teorema

Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è Cauchy $\Longleftrightarrow$ $\exists\, l \in \mathbb{R} : \lim_{n\to+\infty} a_n = l$

## Esercizio

Sia $f(x) = \sqrt{|x|} \; : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

studiare la derivabilità di $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f'$ è ben definito $\forall x \in \mathbb{R}$ $x \neq 0$

Studio la derivabilità in $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{2\sqrt{-x}} = -\infty$$

$\nearrow +\infty$

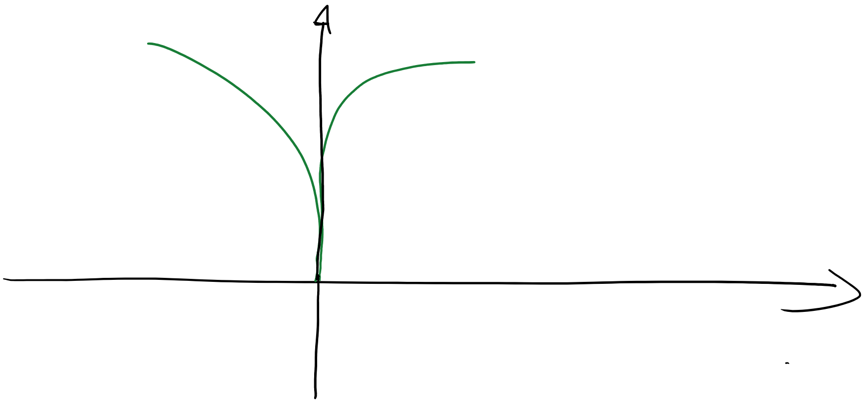
$\searrow 0^+$

$$\underset{x\to 0^-}{\lim} \quad \underset{x\to 0^-}{} \quad 2\sqrt{(-x)} \underset{\to 0^+}{} \quad = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$$

$\Longrightarrow$ $x_0 = 0$ è punto cuspidale

Graficamente



Esercizio Studiare la derivabilità di

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \arctan \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

se $x \neq 0$

$$f'(x) = 1 \cdot \arctan \frac{1}{x} + x \left(\arctan \frac{1}{x}\right)'$$

$$= \arctan \frac{1}{x} + \cancel{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}\right) = (*)$$

Richiamo $(g(x) \cdot h(x))' = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

$$(*) = \arctan \frac{1}{x} - \frac{1}{\cancel{x}} \frac{x^{\cancel{2}}}{x^2+1} =$$

$x^2+1$

$$= \arctan \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

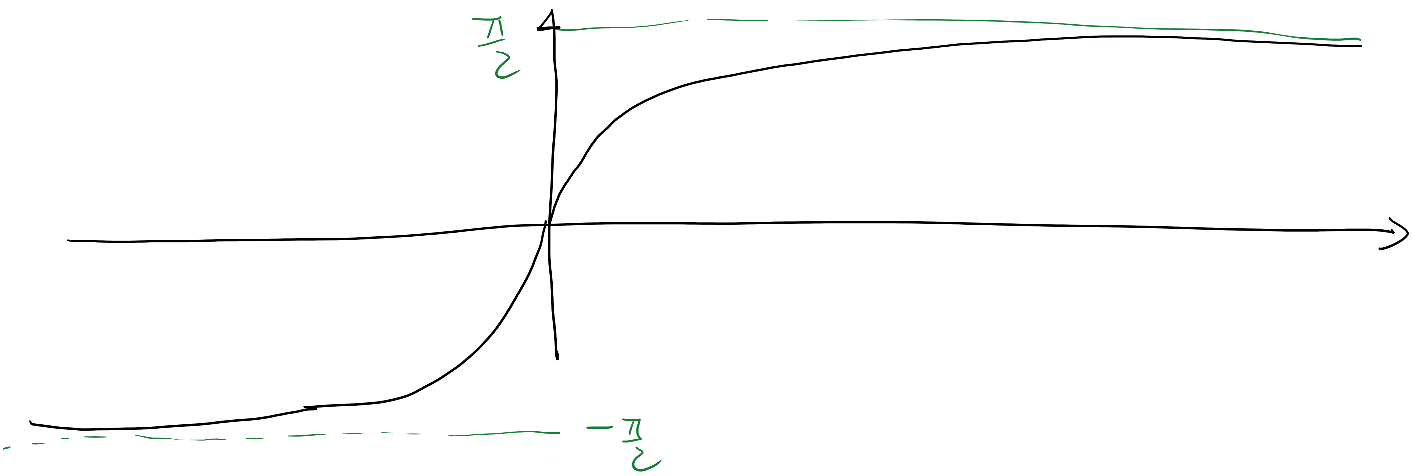
$\Rightarrow f(x)$ è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \arctan \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to -\infty} - \underbrace{\frac{x}{x^2+1}}_{\to 0} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \arctan \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to +\infty} - \underbrace{\frac{x}{x^2+1}}_{\to 0} = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow x_0 = 0$ è punto angoloso

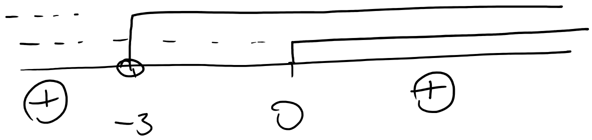
Grafico della funzione $\boxed{f(x) = \arctan x}$




Esercizio Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$$

$$CE \begin{cases} x+3 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq -3 \\ \dfrac{x^3}{x+3} \geq 0 \end{cases}$$




$$CE \quad ]-\infty, -3[ \ \cup \ [0, +\infty[$$

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} \sqrt{\frac{x^3 \to -27}{x-3 \to 0^-}} = +\infty$$

$$\Rightarrow x = -3 \quad AVS$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^2(x+3)}} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x \qquad (+\infty - \infty \ f.i.)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left( \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x \right) \frac{\left( \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} + x \right)}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^3}{x+3} - x^2}{\sqrt{x^3 \ldots}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} - 3x^2}{x+3}}{\ldots}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x \cdot 3}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overline{\phantom{x}x+3\phantom{x}}}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2}{(x+3)\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} + x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2}{(x+3)\, x \cdot \left(\sqrt{\frac{x}{x+3}} + 1\right)} = -\frac{3}{2}$$

$\to -3$

$\to 2$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = x - \frac{3}{2}}$$ è Asint. Obl. destro

Analogamente si ottiene

$$\boxed{y = -x + \frac{3}{2}}$$ è Asintoto Obl. sinistro

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}} \cdot \frac{2x^3 + 9x^2}{(x+3)^2} \geq 0 \quad (?)$$

$(x=0)$ ? $\quad$ 0 non è punto interno del CE

Non ho l'esigenza di studiare la derivabilità in $x_0 = 0$

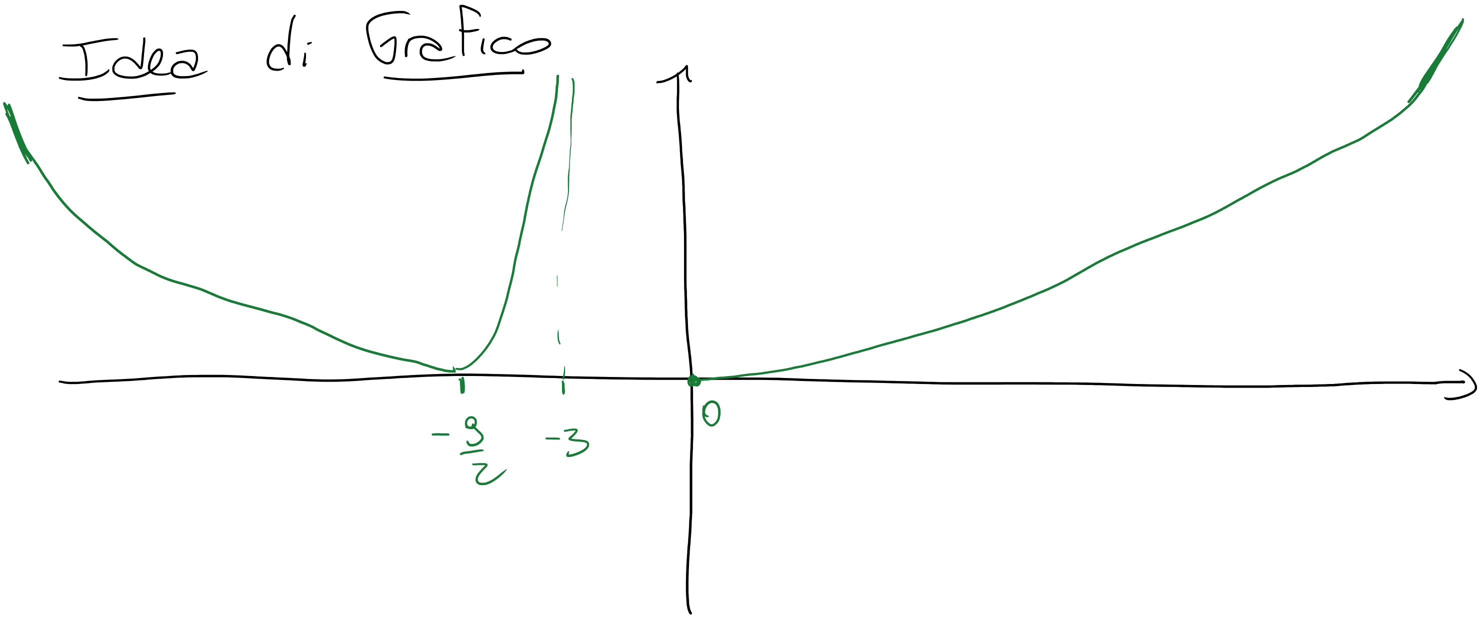
$$F'(x) \geq 0 \iff 2x^3 + 9x^2 \geq 0$$

$$x^2 (2x + 9) \geq 0$$

$$\iff 2x + 9 \geq 0$$

$$\iff x \geq -\frac{9}{2}$$

Idea di Grafico




Esercizio - Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x^2} = \left( \frac{0 - \tan 0}{0^2} = \frac{0}{0} \text{ f.i.} \right)$$

$$\text{De l'Hopital} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{2x} = \left( \frac{1 - \frac{1}{1^2}}{2 \cdot 0} = \frac{0}{0} \text{ f.i.} \right)$$

$$\text{De l'Hopital} = \lim \; \cancel{+} \; \frac{\cancel{+}\, 2\cos x \cdot (-\sin x)}{\cos^4 x}$$

$$\text{De l'Hopital} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{+}\dfrac{\cancel{+}\, 2\cos x \cdot (-\sin x)}{\cos^4 x}}{2} =$$

$$= \frac{\dfrac{2 \cdot 1 \cdot (-0)}{1 1}}{2} = 0$$

$$\text{Ricordo} \quad \boxed{\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}}$$

**Esercizio** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 3}{x^3} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\ \text{f.i.}\right)$

$$\text{De l'Hop.} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3x^2} = \text{De l'Hop}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6x} = \text{De l'Hop}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$$

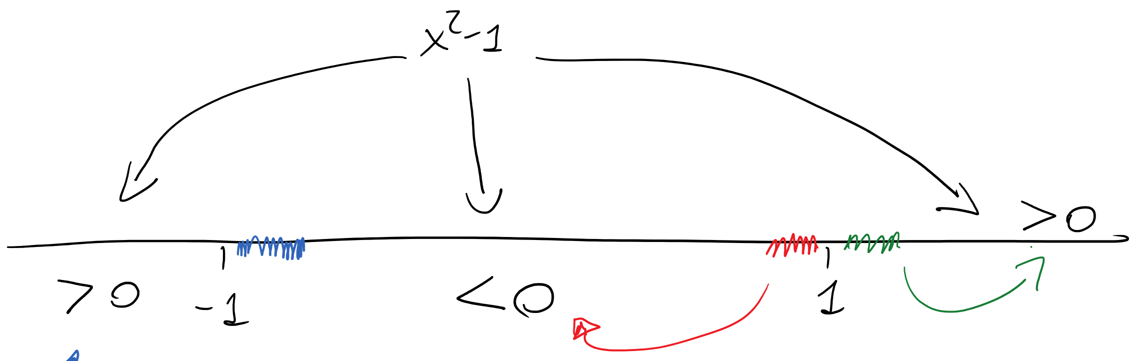
**Esercizio** Studiare la continuità di

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \dfrac{|x|}{x^2-1} & \text{se } x \neq \pm 1 \\ 0 & \text{se } x = \pm 1 \end{cases}$$

Devo studiare la continuità in $x=-1$ e $x=1$

Devo studiare la continuità in $(x=-1)$ e $(x=1)$

$$x^2-1>0 \iff x<-1 \cup x>1$$




$$\lim_{x\to -1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{\overbrace{|x|}^{\to 1}}{\underbrace{x^2-1}_{\to 0^+}}\right) = \left(\arctan(+\infty)\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{\overbrace{|x|}^{\to 1}}{\underbrace{x^2-1}_{\to 0^-}}\right) = \left(\operatorname{arctg}(-\infty)\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow x=-1$ è discont. di $1^a$ specie

$$\lim_{x\to 1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{\overbrace{|x|}^{\to 1}}{\underbrace{x^2-1}_{\to 0^-}}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{|x|}{\underbrace{x^2-1}_{\to 0^+}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$\to 0^+$

$\Rightarrow x = 1$ è discontinuità di specie

Esercizio Studiare la continuità di

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \operatorname{sen} e^{\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Studio la continuità in $x = 0$

Noto che, poiché la $x$ è sempre al quadrato

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \cdot \operatorname{sen}\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right) = \left(0^2 \cdot \operatorname{sen}\left(e^{\frac{1}{0^+}}\right)\right)$$

$$= \left(0^2 \cdot \operatorname{sen}(+\infty)\right)\ ?$$

ma $\quad -1 \leq \operatorname{sen}\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right) \leq 1 \quad \forall x \neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \underbrace{x^2}_{\text{infinitesima}} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)}_{\text{limitata}} = 0$$

$\Rightarrow x = 0$ è discontinuità eliminabile

$\Rightarrow$ $(x=0)$ è discontinuità eliminabile

Esercizio $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} + x = (+\infty - \infty)$

Attenzione : $\boxed{\sqrt{x^2} = -x \qquad (x<0)}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left( \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} + x \right) \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^3}{x+3} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} - 3x^2}{x+3}}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x^2}{(x+3)\left[\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x\right]} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x^2}{(x+3)\left[\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{\frac{x}{x+3}} - x\right]} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x^2}{(x+3)\left[-x\sqrt{\frac{x}{x+3}} - x\right]} =$$

$$- \lim_{x \to -\infty} (x+3)\left[-x\sqrt{\frac{x}{x+3}} - x\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{+}3x^2}{(x+3)\cdot(\cancel{+}x)\left[\sqrt{\frac{x}{x+3}} + 1\right]} = \frac{3}{2}$$

$\frac{3x^2}{(x+3)(-x)} \to 3$, $\left[\sqrt{\frac{x}{x+3}}+1\right] \to 2$

**Esercizio**

$$\lim_{x \to 0} \log_2\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} + |\cos(5x)| + 2\right)$$

$$= \left(\log_2\left(\frac{0^2}{0^2} + |\cos 0| + 2\right)\right)$$

$\frac{0^2}{0^2} \to 1$ f.i.

A parte $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = 1^2 = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = \log_2(3 + 1) = 2$$

**Esercizio** $\lim_{x \to 2^+} (x-2)^{\log(x-1)}$ $= \left(0^{\log 1} = 0^0 \text{ f.i.}\right)$

Usiamo $\left[(x-2)^{\log(x-1)}\right] = e^{\log\left[(x-2)^{\log(x-1)}\right]} =$

$$= e^{\log(x-1)\cdot\log(x-2)}$$

$\log 1$

A parte $\lim\limits_{x\to 2^+} \log(x-1)\cdot\log(x-2) = \left(0\cdot(-\infty)\ f.i.\right)$

$$= \lim_{x\to 2^+} \log\left(1+(x-1-1)\right)\cdot\log(x-2)$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \log\left(1+(x-2)\right)\cdot\log(x-2) = \circledast$$

Ricordo $\boxed{\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\log(1+(x-2))}{x-2} = 1}$

$\to 1$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{\log\left(1+(x-2)\right)}{(x-2)}\cdot(x-2)\cdot\log(x-2)$$

A parte $\lim\limits_{x\to 2^+} (x-2)\cdot\log(x-2) =$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{\log(x-2)}{\frac{1}{(x-2)}} =$$

$$= \lim - \log\left(\frac{1}{(x-2)}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 2^+} - \frac{\log\left(\frac{1}{x-2}\right)}{\frac{1}{x-2}} = (*)$$

Se $z = \frac{1}{x-2}$ $\quad \lim_{x \to 2^+} z = \frac{1}{0^+} = +\infty$

CV $(*)$ $= \lim_{z \to +\infty} - \frac{\log z}{z}$ = De l'Hop

$$= - \lim_{z \to +\infty} \frac{\frac{1}{z}}{1} = 0$$

Conclusione

$$\lim_{x \to 2^+} (x-2)^{\log(x-1)} = \lim_{x \to 2^+} e^{\log(x-2) \cdot \log(x-1)}$$

$$= e^{0} = 1$$